



TITLE:

Galois 拡大の number knot について(代数的整数論とフェルマーの問題)

AUTHOR(S):

堀江, 充子

CITATION:

堀江, 充子. Galois 拡大の number knot について(代数的整数論とフェルマーの問題). 数理解析研究所講究録 1996, 971: 50-61

ISSUE DATE:

1996-10

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/60699>

RIGHT:

Galois 拡大の number knot について

お茶の水女子大学理学部 堀江 充子 (MITSUKO HORIE)

有限次代数体の Galois 拡大 L/k に対して, J_L , J_k 及び L^\times , k^\times をそれぞれ L , k の idèle 群 及び 乗法群とし, $N_{L/k}$ を J_L から J_k へのノルム写像とする. 自然な (対角的な) 埋め込み $k^\times \rightarrow J_k$, $L^\times \rightarrow J_L$ によって, $N_{L/k}$ は通常ノルム写像 $L^\times \rightarrow k^\times$ を引き起こし, 可換図式

$$\begin{array}{ccc} L^\times & \longrightarrow & J_L \\ \downarrow & & \downarrow N_{L/k} \\ k^\times & \longrightarrow & J_k \end{array}$$

が得られるが,

$$\nu_{L/k} = (N_{L/k}(J_L) \cap k^\times) / N_{L/k}(L^\times)$$

とおき, この剰余群を L/k の number knot と呼ぶ.

この小論では, L 及び k を動かしたときの number knot $\nu_{L/k}$ の変化について考察する.

§1. 準備.

有理数体を \mathbf{Q} , 有理整数環を \mathbf{Z} , 全ての自然数の集合を \mathbf{N} とし, \mathbf{Z} で有理整数環の加法群も表す.

よく知られているように, number knot の構造はコホモロジー群を用いて記述される (後述の定理A参照) ので, まずコホモロジー群に関する知識を整理しておく.

有限群 G と G の作用する加群 A が与えられたとき, 任意の $n \in \mathbf{N}$ に対し, A における G の n 次元ホモロジー群を $H_n(G, A)$ と書き, 任意の $r \in \mathbf{Z}$ に対し, Tate の意味 ([9] 参照) での A における G の r 次元コホモロジー群を $H^r(G, A)$ と書く. 従って,

$$H^0(G, A) = A^G / N_G(A), \quad H^{-1}(G, A) = {}_G A / \sum_{\sigma \in G} (1 - \sigma)A,$$

$$H^{-n}(G, A) = H_{n-1}(G, A), \quad 2 \leq n \in \mathbf{N}.$$

ここに N_G は

$$N_G(a) = \sum_{\sigma \in G} \sigma a, \quad a \in A$$

で定められる準同型写像 $A \rightarrow A$ であり,

$$A^G = \{a \in A \mid \sigma a = a \quad (\sigma \in G)\}, \quad {}_G A = \text{Ker } N_G$$

である. なお, ホモロジー群を記述する場合, 標準鎖複体の非斉次形を用いることにする. すなわち, 各整数 $m \geq 0$ に対し G^m を G の m 個の直積とし P_{G^m} を G^m で生成される左 G 自由加群 (特に $P_{G^0} = \mathbf{Z}$) とするとき, 各 $n \in \mathbf{N}$ に対し準同型 $\partial_n: A \otimes_G P_{G^n} \rightarrow A \otimes_G P_{G^{n-1}}$ を

$$\begin{aligned} \partial_n(a \otimes_G (\sigma_1, \dots, \sigma_n)) &= (\sigma_1^{-1}a) \otimes_G (\sigma_2, \dots, \sigma_n) - a \otimes_G (\sigma_1\sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_n) + \dots \\ &\quad + (-1)^{n-1}a \otimes_G (\sigma_1, \dots, \sigma_{n-2}, \sigma_{n-1}\sigma_n) + (-1)^n a \otimes_G (\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}), \\ a &\in A, \quad (\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in G^n \end{aligned}$$

によって定めれば,

$$H_n(G, A) = \text{Ker } \partial_n / \text{Im } \partial_{n+1}, \quad n \in \mathbf{N}$$

である. また, 加法群 \mathbf{Z} は常に自明な G 加群とみなし, $A = \mathbf{Z}$ の場合の $\mathbf{Z} \otimes_G P_{G^n}$, $n \in \mathbf{N}$, の元 $a \otimes_G (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ (但し, $a \in \mathbf{Z}$; $\sigma_1, \dots, \sigma_n \in G$) を単に $a(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ と書くことにする.

改めて G を有限群, A を G 加群とし, H を G の部分群とする時, 任意の $r \in \mathbf{Z}$ に対して, $\text{Res} = \text{Res}_{G,H;A}^{(r)}$ で restriction map $H^r(G, A) \rightarrow H^r(H, A)$ を表し, $\text{Cor} = \text{Cor}_{G,H;A}^{(r)}$ で corestriction map $H^r(H, A) \rightarrow H^r(G, A)$ を表す. T を 左剰余類 $H \backslash G$ の完全代表系とし, 各 $\sigma \in G$ に対し, $\bar{\sigma}$ を $H\bar{\sigma} = H\sigma$ で一意的に定まる T の元とすれば, 特に各整数 $m \geq 0$ に対し $\text{Res}_{G,H;A}^{(-m-1)}$ は $m = 0$ の場合 $a \mapsto \sum_{\tau \in T} \tau a$, $a \in A$, により, $m \geq 1$ の場合

$$a \otimes_G (\sigma_1, \dots, \sigma_m) \mapsto \sum_{\tau \in T} \tau a \otimes_H (\tau \sigma_1 \bar{\tau} \sigma_1^{-1}, \bar{\tau} \sigma_1 \sigma_2 \bar{\tau} \sigma_1 \sigma_2^{-1}, \dots, \bar{\tau} \sigma_1 \cdots \sigma_{m-1} \sigma_m \bar{\tau} \sigma_1 \cdots \sigma_m^{-1}),$$

$$a \in A, \quad (\sigma_1, \dots, \sigma_m) \in G^m,$$

により定まる準同型 $A \otimes_G P_{G^m} \rightarrow A \otimes_H P_{H^m}$ から導かれる. 同時に $\text{Cor}_{G,H;A}^{(-m-1)}$ は

$$a \otimes_H (\sigma_1, \dots, \sigma_m) \mapsto a \otimes_G (\sigma_1, \dots, \sigma_m), \quad a \in A, \quad (\sigma_1, \dots, \sigma_m) \in H^m$$

により定まる準同型 $A \otimes_H P_{H^m} \rightarrow A \otimes_G P_{G^m}$ から導かれる.

更に, H が G の正規部分群であるとき各整数 $m \geq 0$ に対して, deflation map

$$\text{Defl} : H^{-m}(G, A) \rightarrow H^{-m}(G/H, A^H)$$

は $m = 0$, $m = 1$, ないし $m \geq 2$ の場合に応じて, それぞれ

$$a \mapsto a, \quad a \in A^G$$

により定まる準同型 $A^G \rightarrow (A^H)^{G/H}$,

$$a \mapsto N_H(a), \quad a \in {}_G A$$

により定まる準同型 ${}_G A \longrightarrow {}_{G/H}(A^H)$, ないし

$$a \otimes_G (\sigma_1, \dots, \sigma_{m-1}) \mapsto N_H(a) \otimes_{G/H} (\sigma_1 H, \dots, \sigma_{m-1} H),$$

$$a \in A, \quad (\sigma_1, \dots, \sigma_{m-1}) \in G^{m-1}$$

により定まる準同型 $A \otimes_G P_{G^{m-1}} \longrightarrow A \otimes_H P_{H^{m-1}}$ から導かれる (河田 [3], Weiss[10], ...).

次に $A_H = A / \sum_{\tau \in H} (1 - \tau)A$ とおき, 各 $n \in \mathbf{N}$ に対して, residuation map

$$\text{Resid} : H_n(G, A) \longrightarrow H_n(G/H, A_H)$$

を

$$a \otimes_G (\sigma_1, \dots, \sigma_n) \mapsto (a + \sum_{\tau \in H} (1 - \tau)A) \otimes_{G/H} (\sigma_1 H, \dots, \sigma_n H),$$

$$a \in A, \quad (\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in G^n$$

により定まる準同型 $A \otimes_G P_{G^n} \longrightarrow A_H \otimes_{G/H} P_{(G/H)^n}$ から導かれる準同型として定義する (中山 [6]).

注意 $A = \mathbf{Z}$ のとき, 各 $n \in \mathbf{N}$ に対し $H^{-n-1}(G, \mathbf{Z})$ から $H^{-n-1}(H, \mathbf{Z})$ への写像として Defl と Resid の両方が定義され

$$\text{Defl}(\zeta) = |H| \text{Resid}(\zeta), \quad \zeta \in H^{-n-1}(G, \mathbf{Z}).$$

Weiss [10] の中でこの Resid は $\frac{\text{Defl}}{|H|}$ と表されている.

以下, L/k を有限次代数体の Galois 拡大とし, $G = \text{Gal}(L/k)$ とおく. 更に, k の各素点 v に対し, v の上にある L の素点 V を 1 つずつ選んで固定し, G_v を V の L/k に

関する分解群, L_v を V における L の完備化とする. v が L で不分岐のときには G_v は巡回群なので, $H^{-3}(G_v, \mathbf{Z}) = \{0\}$ となる. このことに注意して, 準同型写像

$$\rho_{L/k} : \bigoplus_v H^{-3}(G_v, \mathbf{Z}) \longrightarrow H^{-3}(G, \mathbf{Z})$$

を

$$\rho_{L/k}((\zeta_v)_v) = \sum_v \text{Cor}_{G, G_v, \mathbf{Z}}^{(-3)}(\zeta_v), \quad \zeta_v \in H^{-3}(G_v, \mathbf{Z})$$

により定義する. 更に, C_L によって L の idèle 類群を表すものとする.

さて $r \in \mathbf{Z}$ とし ξ を $H^2(G, C_L)$ の標準類とする. また k の各素点 v に対し, ξ_v を $H^2(G_v, L_v^\times)$ の標準類とする. よく知られているように,

$$(a, b) \mapsto a^b, \quad a \in C_L, \quad b \in \mathbf{Z}$$

によって定義される G -pairing $C_L \times \mathbf{Z} \longrightarrow C_L$ は cup 積 $H^2(G, C_L) \times H^r(G, \mathbf{Z}) \longrightarrow H^{r+2}(G, C_L)$ を与えるが, この cup 積による各 (ξ, ζ) , $\zeta \in H^r(G, \mathbf{Z})$, の像を $\xi \cup \zeta$ と書けば,

$$\Phi_{L/k}(\zeta) = \xi \cup \zeta, \quad \zeta \in H^r(G, \mathbf{Z})$$

により同型 $\Phi_{L/k} : H^r(G, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} H^{r+2}(G, C_L)$ が引き起こされる (Tate, [3,9] 参照).

同様に k の素点 v に対して, 自明な G_v -pairing $L_v^\times \times \mathbf{Z} \longrightarrow L_v^\times$ の引き起こす cup 積 $H^2(G_v, L_v^\times) \times H^r(G_v, \mathbf{Z}) \longrightarrow H^{r+2}(G_v, L_v^\times)$ による各 (ξ_v, ζ_v) , $\zeta_v \in H^r(G_v, \mathbf{Z})$, の像を $\xi_v \cup_v \zeta_v$ と書けば

$$\Phi_v(\zeta_v) = \xi_v \cup_v \zeta_v, \quad \zeta_v \in H^r(G_v, \mathbf{Z})$$

により同型 $\Phi_v : H^r(G_v, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} H^{r+2}(G_v, L_v^\times)$ が定まる (Tate, [3] 参照). 特に

$\Phi_{L/k} : H^{-3}(G, \mathbf{Z}) \longrightarrow H^{-1}(G, C_L)$ は, 2-cocycle $f \in \xi$ をとったとき

$$a(\sigma_1, \sigma_2) \mapsto f(\sigma_1, \sigma_2)^a, \quad a \in \mathbf{Z}, \quad (\sigma_1, \sigma_2) \in G^2$$

で定まる準同型 $\mathbf{Z} \otimes_G P_{G^2} \rightarrow C_L$ から導かれる同型に他ならない. なお, 周知のように

$$\Phi_{L/k} : H^{-2}(G, \mathbf{Z}) \rightarrow H^0(G, C_L)$$

は類体論の相互法則を与えている. さて, k のすべての素点 v に関する

$$\Phi_v : H^{-3}(G_v, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} H^{-1}(G_v, L_v^\times)$$

は同型

$$\bigoplus_v H^{-3}(G_v, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} H^{-1}(G, J_L) = \bigoplus_v H^{-1}(G_v, L_v^\times)$$

を引き起こし, 自然な G 準同型 $J_L \rightarrow C_L$ は準同型

$$H^{-1}(G, J_L) \rightarrow H^{-1}(G, C_L)$$

を引き起こす. そしてこれらは可換な図式

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_v H^{-3}(G_v, \mathbf{Z}) & \xrightarrow{\sim} & H^{-1}(G, J_L) \\ \downarrow \rho_{L/k} & & \downarrow \\ H^{-3}(G, \mathbf{Z}) & \xrightarrow{\Phi_{L/k}} & H^{-1}(G, C_L) \end{array}$$

を与える. 一方 $N_{L/k}$ は準同型

$$H^{-1}(G, C_L) = {}_G(C_L) / \left(\prod_{\sigma \in G} C_L^{1-\sigma} \right) \rightarrow \nu_{L/k}$$

を引き起こすが, この準同型も $N_{L/k}$ と書くことにすれば, 完全系列

$$H^{-1}(G, J_L) \rightarrow H^{-1}(G, C_L) \xrightarrow{N_{L/k}} \nu_{L/k} \rightarrow 1$$

を得る. 従ってよく知られた次の結果が得られる.

定理A (Scholz[8], Tate[9], 国吉 [4]) $\nu_{L/k} \cong \text{Coker}(\rho_{L/k})$.

§2. 可換図式.

L/k 及び M/K を有限次代数体の Galois 拡大とし

$$G = \text{Gal}(L/k), \quad X = \text{Gal}(M/K)$$

とする. L/k と M/K の間に何らかの関係があるとき, 二つの完全系列

$$H^{-3}(G, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\Phi_{L/k}} H^{-1}(G, C_L) \xrightarrow{N_{L/k}} \nu_{L/k},$$

$$H^{-3}(X, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\Phi_{M/K}} H^{-1}(X, C_M) \xrightarrow{N_{M/K}} \nu_{M/K}$$

の間にどのような関係があるかを, 以下四つの場合について考察する.

I. $L = M \supset K \supset k$ である場合, $G \supset X$ であるが, 各 $r \in \mathbf{Z}$ に対し次の二つの図式が可換であることはよく知られている.

$$\begin{array}{ccc} H^r(G, \mathbf{Z}) & \xrightarrow{\Phi_{L/k}} & H^{r+2}(G, C_L) \\ \downarrow \text{Res} & & \downarrow \text{Res} \\ H^r(X, \mathbf{Z}) & \xrightarrow{\Phi_{L/K}} & H^{r+2}(X, C_L) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} H^r(G, \mathbf{Z}) & \xrightarrow{\Phi_{L/k}} & H^{r+2}(G, C_L) \\ \uparrow \text{Cor} & & \uparrow \text{Cor} \\ H^r(X, \mathbf{Z}) & \xrightarrow{\Phi_{L/K}} & H^{r+2}(X, C_L) \end{array}$$

従って次の結果が得られる.

命題 1 二つ図式

$$\begin{array}{ccc} H^{-3}(G, \mathbf{Z}) & \xrightarrow{N_{L/k} \cdot \Phi_{L/k}} & \nu_{L/k} \\ \downarrow \text{Res} & & \downarrow \\ H^{-3}(X, \mathbf{Z}) & \xrightarrow{N_{L/K} \cdot \Phi_{L/K}} & \nu_{L/K} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} H^{-3}(G, \mathbf{Z}) & \xrightarrow{N_{L/k} \cdot \Phi_{L/k}} & \nu_{L/k} \\ \uparrow \text{Cor} & & \uparrow \\ H^{-3}(X, \mathbf{Z}) & \xrightarrow{N_{L/K} \cdot \Phi_{L/K}} & \nu_{L/K} \end{array}$$

は可換である. ただし, 左から 2 番目の縦写像は自然な埋め込み $J_k \rightarrow J_K$ から導かれる準同型であり, 右辺の縦写像は $N_{K/k} : J_K \rightarrow J_k$ から導かれる準同型である.

II. $L \supset M \supset K = k$ である場合, $Y = \text{Gal}(L/M)$ とおけば $X = G/Y$ とみなせる. S を剰余群 G/Y の完全代表系とし, 各 $\sigma \in G$ に対して $\bar{\sigma}$ を $\bar{\sigma}Y = \sigma Y$ で一意的に定まる S の元とすれば,

$$(\sigma_1 Y, \sigma_2 Y) \mapsto |Y|(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2), \quad (\sigma_1, \sigma_2) \in G^2$$

により定まる準同型 $\mathbf{Z} \otimes_X P_{X^2} \rightarrow \mathbf{Z} \otimes_G P_{G^2}$ は準同型 $H_2(X, \mathbf{Z}) \rightarrow H_2(G, \mathbf{Z})$ を導くことが Miller [5] における議論よりわかる. そこでこの準同型を μ_Y と書くことにする.

補題 1 m を負でない整数とすると, 次の二つの図式は可換である.

$$\begin{array}{ccccc} H^{-m-2}(G, \mathbf{Z}) & \xrightarrow{\Phi_{L/k}} & H^{-m}(G, C_L) & H^{-3}(G, \mathbf{Z}) & \xrightarrow{\Phi_{L/k}} & H^{-1}(G, C_L) \\ \downarrow \text{Resid} & & \downarrow \text{Defl} & \uparrow \mu_Y & & \uparrow \\ H^{-m-2}(X, \mathbf{Z}) & \xrightarrow{\Phi_{M/k}} & H^{-m}(X, C_M) & H^{-3}(X, \mathbf{Z}) & \xrightarrow{\Phi_{M/k}} & H^{-1}(X, C_M). \end{array}$$

ここで右辺の縦写像は

$$\mathfrak{a}M^\times \mapsto \mathfrak{a}L^\times, \quad \mathfrak{a} \in J_M$$

により定まる準同型 $X(C_M) \rightarrow G(C_L)$ が自然に導く準同型である.

従って:

命題 2 二つ図式

$$\begin{array}{ccccc} H^{-3}(G, \mathbf{Z}) & \xrightarrow{N_{L/k} \cdot \Phi_{L/k}} & \nu_{L/k} & H^{-3}(G, \mathbf{Z}) & \xrightarrow{N_{L/k} \cdot \Phi_{L/k}} & \nu_{L/k} \\ \downarrow \text{Resid} & & \downarrow & \uparrow \mu_Y & & \uparrow \\ H^{-3}(X, \mathbf{Z}) & \xrightarrow{N_{M/k} \cdot \Phi_{M/k}} & \nu_{M/k} & H^{-3}(X, \mathbf{Z}) & \xrightarrow{N_{M/k} \cdot \Phi_{M/k}} & \nu_{M/k} \end{array}$$

は可換である. ここで左から 2 番目の縦写像は恒等写像 $J_k \rightarrow J_k$ から導かれる準同型であり, 右辺の縦写像は J_k の自己準同型

$$\mathfrak{a} \mapsto \mathfrak{a}^{[L:M]} = \mathfrak{a}^{|Y|}, \quad \mathfrak{a} \in J_k$$

から導かれる準同型である.

注意 命題2の左側の図式の可換性は既に 国吉 [4] の中で述べられている.

III. $M = LK$ かつ $k = L \cap K$ である場合,

$$(\sigma_1, \sigma_2) \mapsto (\sigma_1|L, \sigma_2|L), \quad (\sigma_1, \sigma_2) \in X^2$$

により定まる同型 $\mathbf{Z} \otimes_X P_{X^2} \rightarrow \mathbf{Z} \otimes_G P_{G^2}$ が引き起こす同型 $H_2(X, \mathbf{Z}) \rightarrow H_2(G, \mathbf{Z})$

を ψ と書こう.

命題3 次の二つ図式は可換である.

$$\begin{array}{ccc} H^{-3}(G, \mathbf{Z}) & \xrightarrow{N_{L/k} \cdot \Phi_{L/k}} & \nu_{L/k} \\ \downarrow [K:k]\psi^{-1} & & \downarrow \\ H^{-3}(X, \mathbf{Z}) & \xrightarrow{N_{M/K} \cdot \Phi_{M/K}} & \nu_{M/K} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} H^{-3}(G, \mathbf{Z}) & \xrightarrow{N_{L/k} \cdot \Phi_{L/k}} & \nu_{L/k} \\ \uparrow \psi & & \uparrow \\ H^{-3}(X, \mathbf{Z}) & \xrightarrow{N_{M/K} \cdot \Phi_{M/K}} & \nu_{M/K} \end{array}$$

ここに各 $n \in \mathbf{Z}$ に対し $n\psi^{-1}$ は勿論

$$\zeta \mapsto n(\psi^{-1}(\zeta)), \quad \zeta \in H^{-3}(G, \mathbf{Z})$$

により定まる準同型 $H^{-3}(G, \mathbf{Z}) \rightarrow H^{-3}(X, \mathbf{Z})$ を表し, 左から2番目の縦写像は自然な埋め込み $J_k \rightarrow J_K$ の導く準同型, 右辺の縦写像は $N_{K/k} : J_K \rightarrow J_k$ の導く準同型である.

注意 M/k が Galois 拡大である場合, $\tilde{X} = \text{Gal}(M/k)$ とおけば, ψ は合成写像

$$H^{-3}(X, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\text{Cor}} H^{-3}(\tilde{X}, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\text{Resid}} H^{-3}(G, \mathbf{Z})$$

に他ならない. $Y = \text{Gal}(M/L)$ とおくとき, II におけるのと同様にして準同型 $\mu_Y :$

$H^{-3}(G, \mathbf{Z}) \rightarrow H^{-3}(\tilde{X}, \mathbf{Z})$ を得るが, この場合 $[K:k]^2\psi^{-1}$ が合成写像

$$H^{-3}(G, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\mu_Y} H^{-3}(\tilde{X}, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\text{Res}} H^{-3}(X, \mathbf{Z})$$

である.

IV. 同型 $\gamma: L \xrightarrow{\sim} M$ が存在し, $\gamma|_k$ が同型 $k \xrightarrow{\sim} K$ を与える場合,

$$X = \{\gamma \cdot \sigma \cdot \gamma^{-1} \mid \sigma \in G\}$$

であるから

$$(\sigma_1, \sigma_2) \mapsto (\gamma \cdot \sigma_1 \cdot \gamma^{-1}, \gamma \cdot \sigma_2 \cdot \gamma^{-1}), \quad (\sigma_1, \sigma_2) \in G^2$$

により準同型 $\mathbf{Z} \otimes_G P_{G^2} \rightarrow \mathbf{Z} \otimes_X P_{X^2}$ が定義される. 一方, γ は自然な同型 $J_k \xrightarrow{\sim} J_K$ を与える. そこでこれらの引き起こす準同型 $H^{-3}(G, \mathbf{Z}) \rightarrow H^{-3}(X, \mathbf{Z})$ ないし準同型 $\nu_{L/k} \rightarrow \nu_{M/K}$ をそれぞれ $\bar{\gamma}$ ないし γ^* と書けば次の結果が容易に得られる.

命題 4 図式

$$\begin{array}{ccc} H^{-3}(G, \mathbf{Z}) & \xrightarrow{N_{L/k} \cdot \Phi_{L/k}} & \nu_{L/k} \\ \downarrow \bar{\gamma} & & \downarrow \gamma^* \\ H^{-3}(X, \mathbf{Z}) & \xrightarrow{N_{M/K} \cdot \Phi_{M/K}} & \nu_{M/K} \end{array}$$

は可換である.

§3. 応用.

前節で与えた可換図式により, Galois 拡大の number knot の変化する様子を見るためには, \mathbf{Z} における Galois 群の -3 次元コホモロジー群の変化する様子を調べればよい. 最後に, 前節の結果を応用してわかることをいくつか挙げることにする.

L/k を有限次代数体の Galois 拡大とし, K を L に含まれる k の Galois 拡大体とするとき, 恒等写像 $J_k \rightarrow J_k$ が与える準同型 $\nu_{L/k} \rightarrow \nu_{K/k}$ の核を $\nu_{L/K/k}$ と書く:

$$\nu_{L/K/k} = \text{Ker}(\nu_{L/k} \rightarrow \nu_{K/k}) = N_{L/k}(J_L) \cap N_{K/k}(K^\times) / N_{L/k}(L^\times).$$

定理 1 k を有限次代数体とし, K 及び L を k の有限次 Galois 拡大体で $[K:k]$ と $[L:k]$ が互いに素なものとするとき, $M = KL$ とすれば $\nu_{M/K} \cong \nu_{M/K/k} \cong \nu_{L/k}$ であり

$$\nu_{M/k} = \nu_{M/K/k} \times \nu_{M/L/k}$$

が成り立つ.

注意 定理 1 の仮定の下で $\nu_{M/k} \cong \nu_{K/k} \times \nu_{L/k}$ となることは既に Razar [7] で示されている ([2] も参照).

定理 2 F/k を有限次代数体の Galois 拡大とし, L は F と k の任意の有限次 Abel 拡大体との合成体とすれば, 恒等写像 $J_k \rightarrow J_k$ から自然に導かれる準同型 $\nu_{L/k} \rightarrow \nu_{F/k}$ は全射である.

さて各 $(m, n) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$, $m \mid n$, に対し

$$\phi_{m,n}(a + n\mathbf{Z}) = a + m\mathbf{Z}, \quad a \in \mathbf{Z}$$

により準同型 $\phi_{m,n} : \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ が定義され, 射影系

$$(\{\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \mid n \in \mathbf{Z}\}, \{\phi_{m,n} \mid m, n \in \mathbf{Z}, m \mid n\})$$

が得られる. この射影系の射影的極限を $\hat{\mathbf{Z}}$ と書く:

$$\hat{\mathbf{Z}} = \varprojlim_{n \in \mathbf{N}} \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}.$$

$\hat{\mathbf{Z}}$ はすべての素数 p に関する p 進整数環の加法群の直積に位相群として同型である. 周知のように, 任意の有限次代数体 k に対し, k の Galois 拡大体 \tilde{k} で位相群として

$$\text{Gal}(\tilde{k}/k) \cong \hat{\mathbf{Z}}$$

となるものが存在する. このような代数体 \tilde{k} を k の $\hat{\mathbf{Z}}$ 拡大体と呼ぶ.

定理3 K/k を有限次代数体の Abel 拡大とし, Ω を K と k の任意の $\hat{\mathbb{Z}}$ 拡大体との合成体とすれば, Ω/K の中間体であるほとんど全ての有限次代数体 F と Ω/F の任意の有限次中間体 L に対し $\nu_{L/F/k} = 1$ であり従って $\nu_{L/k} \cong \nu_{F/k}$ が成り立つ.

定理4 K を2次体とし, M を極大な K の狭義不分岐2巾次巡回拡大体とすれば $\nu_{M/\mathbb{Q}} = 1$ であって, L/F を M/K の中間体の拡大とし, $M \neq L, F \neq K$ とするとき, $|\nu_{F/\mathbb{Q}}| = |\nu_{L/\mathbb{Q}}| = 2$ となる. しかも $J_{\mathbb{Q}}$ の自己準同型

$$a \mapsto a^{[L:F]}, \quad a \in J_{\mathbb{Q}}$$

が与える準同型 $\nu_{F/\mathbb{Q}} \rightarrow \nu_{L/\mathbb{Q}}$ は同型写像である.

注意 定理2の仮定の下では(定理2により) $\nu_{L/k}$ の生成系(の代表)がそのまま $\nu_{F/k}$ の生成系を与えることになる. 定理3についても同様である. 逆に定理4の仮定の下では $\nu_{F/\mathbb{Q}}$ の生成元の代表を $[L:F]$ 乗したものが $\nu_{L/\mathbb{Q}}$ の生成元を与えるのである.

文 献

1. 堀江充子, *Hasse norm principle* について, 数理研講究録 **797** (1992), 81-87.
2. W. Jehne, *On knots in algebraic number theory*, J. reine angew. Math. **311/312** (1979), 215-254.
3. 河田敬義, 代数的整数論, 共立出版, 1957.
4. 国吉秀夫, *Cohomology 群の整数論的性質 §4. Total-norm-residue*, 数学 **6** (1954), 38.
5. C. Miller, *The second homology group of a group; relations among commutators*, Proc. Amer. Math. Soc. **3** (1952), 588-595.
6. T. Nakayama (中山正), *A remark on fundamental exact sequences in cohomology of finite groups*, Proc. Japan Acad. **32** (1956), 731-735.
7. M. J. Razar, *Central and genus class fields and the Hasse norm theorem*, Compositio Math. **35** (1977), 281-298.
8. A. Scholz, *Totale Normenreste, die keine Normen sind, als Erzeuger nicht abelscher Körpererweiterungen. I*, J. reine angew. Math. **172** (1936), 100-107, *II*, J. reine angew. Math., **182** (1940), 217-234.
9. J. T. Tate, *Global class field theory*; in "Algebraic number theory" (J. W. Cassels and Fröhlich, eds.), Academic Press, London/New York, 1967.
10. E. Weiss, *A deflation map*, J. Math. Mech. **8** (1959), 309-329.